MathCat жёлтый

1. (4) Первоклассник Ларик стал искать сумму всех чисел от 15 до 43. Получил в результате 804. Это неверный результат, так как Ларик пропустил одно число. Какое число пропустил Ларик?

Ответ: 37.

Решение. Если бы Ларик ничего не пропустил, то сумма оказалась бы равна 29·(15+43)/2 = 841. Следовательно, пропущенное число равно 841–804=37.

2. (5) Чему равно значение выражения:

$$1 - (2 - (3 - (4 - (5 - \ldots - (999 - (1000 - 1001))\ldots)))?$$

Ответ: 501.

Решение. Это выражение равно сумме всех нечётных чисел от 1 до 1001, уменьшенной на сумму всех чётных от 2 до 1000. Так как каждое нечётное число, кроме 1, на единицу больше предыдущего чётного, то все разности можно таким образом сократить, – получится сумма из 501 единицы.

3. (6) В последовательности a_n сумма любых трёх подряд идущих чисел равна 2015, причём a_4=673, a_{300}=672. Чему равно a_{2015}?

Ответ: 670

Решение. Нетрудно убедиться, что эта последовательность периодична с длиной периода 3: $a_1=a_4=a_7=\ldots=a_{2014}$, $a_2=a_5=a_8=\ldots=a_{2015}$ и $a_3=a_6=\ldots=a_{300}=\ldots=a_{2013}$. Так как первые числа равны 673, а последние 672, то $a_{2015}=a_2$=2015–673–672=670.

4. (10) Бизнесмен Вася хранит свои сбережения в тугриках и песо. Вчера в пересчёте на рубли у него было тугриков вдвое больше, чем песо. Сегодня курс тугрика по отношению к рублю вырос на 6%, а курс песо — на 12%. На сколько процентов увеличились сбережения Васи?

Ответ: на 8%.

Решение. Пусть капитал Васи вчера составлял V песо и 2V тугриков, а всего был равен 3V. Сегодня тот же капитал стал равным 1,12V песо и 2,12V (2V×1,06) тугриков. Итого 3,24 V, то есть вырос в 3,24/3 = 1,08 раза, или на 8%.

5. (10) Какое наименьшее число карт нужно вытащить из стандартной колоды (36 карт – 4 масти по 9 карт в каждой), чтобы среди них обязательно оказалось две карты, отличающиеся и мастью, и достоинством?

Ответ: 10.

Решение: В задаче спрашивается про наименьшее число, поэтому нам нужно будет доказать утверждение задачи для нашего ответа и опровергнуть это утверждение для 9 карт. Контрпример для 9 карт – вытаскивание одной полной масти. Если вытащено 10 карт, то среди них найдутся хотя бы две карты одинакового достоинства. Пусть это, например, два туза. Среди остальных карт есть не более двух тузов, поэтому есть еще хотя бы один не туз (например, это шестёрка). Взяв эту шестёрку и того из двух тузов, который не совпадает с ней по масти, получаем две карты, отличающиеся по масти и достоинству.

6. (10) В классе учатся 30 человек. Каждый из них либо всегда лжёт, либо всегда говорит правду. На уроке физкультуры все они выстроились по кругу так, что рядом с каждым лгуном оказались лгун и правдивый. На вопрос учителя: «Сколько лгунов стоит рядом с тобой?» — 12 человек ответили, что один, а 18 — что два. Сколько правдивых учеников в классе? (Не забудьте обосновать свой ответ и доказать, что других вариантов не бывает.)

Ответ: 14

Решение 1. По условию, никакие три лгуна не стоят рядом и никакой лгун не стоит между правдивыми. Следовательно, лгуны стоят по кругу парами, а вокруг них стоят правдивые (по одному или больше). Если бы хоть где-то между правдивыми стоял еще один правдивый, то он бы на заданный учителем вопрос ответил «ни одного». Так как такого ответа не было, то правдивые стоят по одному или парами. При этом общее число групп правдивых равно общему числу групп лжецов, так как группы чередуются. Каждый из пары правдивых на вопрос отвечает «один», а все остальные отвечают «два». Следовательно, таких пар 12/2=6. Пусть, кроме них, есть ещё x правдивых одиночек (x групп) и x+6 пар лжецов. По условию, $x+2(x+6)=18$, откуда получаем $x=2$, а всего правдивых 12+2=14.

7. (10) Аня, Боря и Вова в воскресенье ходили на каток, который работает с 10:00 до 18:00. Аня пришла к открытию, Вова катался до самого закрытия. Боря ровно час катался вместе с Аней и ровно час вместе с Вовой. Вова катался в 2 раза меньше Ани и в три раза меньше Бори. Назовите время, когда Боря пришёл на каток и время, когда он оттуда ушёл.

Ответ: с 12:20 до 17:20.

Решение. Пусть Аня каталась с 10:00 до момента t_1, а Вова катался от t_2 до 18:00. Это означает, что Боря катался от момента t_1–1 до момента t_2+1, то есть всего 2+ $t_2 - t_1$. Из условий получаем систему уравнений

$$2(18 - t_2) = t_1 - 10.$$
$$3(18 - t_2) = 2 + t_2 - t_1$$

Из первого уравнения выражаем t_1: $t_1=10+2(18 - t_2)=46-2t_2$ и подставляем во второе.

$54 - 3t_2 = 2 + t_2 - (46-2t_2)$, $t_2=49/3$, откуда $t_1 = 40/3$. Следовательно, $t_1-1 = 37/3 = 12\ 1/3$, или 12 часов 20 минут, а $t_2+1 = 52/3 = 17\ 1/3$ = 17 часов 20 минут.

*8. (15) В некотором примере восемь различных цифр заменили звёздочками. Получили **** + 2015 = ****. Какое наименьшее значение суммы могло получиться? (Не забудьте обосновать свой ответ)*

Ответ: 1487 + 2015 = 3502.

Решение: Здесь также наиболее сложным является обоснование невозможности меньшего результата. Так как первое слагаемое не меньше 1000, то сумма не менее 3000, поэтому цифры 1 и 3 оказываются использованными. Варианты суммы 33** и 31**, таким образом, невозможны. Невозможен также вариант 30**, которому соответствует первое слагаемое 10** (повторяется 0). Варианту 32** могли бы соответствовать 12** и 11** в первом слагаемом, но оба случая исключаются из-за повтора двойки и единицы соответственно. Аналогично, варианту 34** мог бы соответствовать 14** или 13**, но в первом повторяется четвёрка, а во втором тройка. Таким образом, минимально возможная сумма равна 35**. Так как 3500 и 3501 невозможны (повтор нуля и повтор единицы), то наименьшее возможное значение равно 3502.

9. (15) Клетки доски 4×4 раскрашены в несколько цветов. При этом все прямоугольники 1×2 раскрашены по-разному. При каком наименьшем числе цветов такое возможно? (Обоснуйте свой ответ)

Ответ: 7.

Решение: в этой задаче построить пример, пожалуй, труднее, чем обосновать его правильность. Один из возможных примеров показан на рисунке (для наглядности цвета помечены числами от 1 до 7).

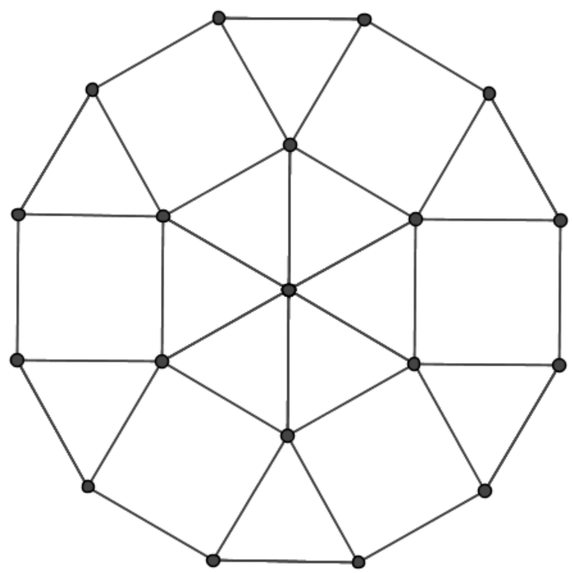
1	2	2	3
4	4	5	3
6	7	5	6
2	7	1	1

Докажем, что шести цветов недостаточно. На доске 4×4 имеется 12 горизонтальных и столько же вертикальных прямоугольников 1×2, поэтому для них нужно иметь не менее чем 24 разных наборов цветов. Но шесть цветов дают всего лишь 6 одноцветных и 6·5/2 = 15 двуцветных наборов, 6+15<24, поэтому шести цветов недостаточно.

10. (15) Имеется неограниченный запас плиток в форме правильного треугольника и квадрата. Стороны всех треугольников и квадратов равны. Из этих плиток выложили выпуклый многоугольник (плитки не налегают *друг на друга, весь многоугольник внутри покрыт плитками). Какое наибольшее число сторон он может иметь? (Обоснуйте свой ответ)*

Ответ: 12.

Решение. Сумма внутренних углов N-угольника равна $180°(N–2)$, поэтому наибольший из них имеет величину не меньшую, чем $180°(N–2)/N$. При N=12 эта величина равна 150, а при N>12 она больше 150, поэтому хотя бы один из углов должен быть больше 150°. Но с помощью треугольников (все углы по 60°) и квадратов (все углы по 90°) невозможно получить углы, меньшие 180° и одновременно большие 150°. Следовательно, выпуклых многоугольников с N>12 построить нельзя. Пример для N=12 строится легко (правильный 12-угольник):



Комментарий: в этой задаче, как и во многих предыдущих, рассуждение «весит» намного больше, чем пример.