Решения заданий красного уровня

1. (5 баллов) На одной чашке весов лежат 7 апельсинов, а на другой – 3 дыни. Если добавить одну такую же дыню к апельсинам, а один такой же апельсин к дыням, то весы уравновесятся. Сколько апельсинов уравновесят дыню?

Решение. По условию, 7 апельсинов и дыня равны 3 дыням и апельсину. Значит, 6 апельсинов равны двум дыням, а одна дыня уравновешивается тремя апельсинами.

Ответ. 3.

2. (5 баллов) Заполните пустые ячейки пирамиды натуральными числами так, чтобы каждое число было равно произведению двух чисел, написанных под ним. Чему равна сумма всех чисел в пирамиде? Укажите все возможности.

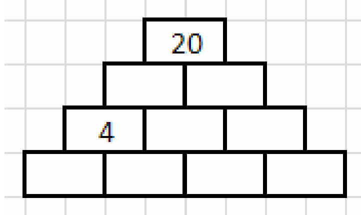

Рис. 1

Решение. В ячейке между 4 и 20 должно быть число, которое само является делителем 20 и делится на 4. Таких чисел два – 4 и 20. Если предположить, что там вписано 20, то сразу заполняются ячейки с числами 1 и 5, показанные на рис. 2. Но тогда 1 должно быть произведением 5 на какое-то натуральное число, а это невозможно. Поэтому этот вариант невозможен.

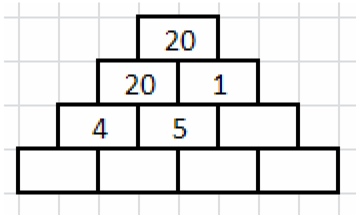

Рис. 2

Для второго варианта получаем единственный возможный пример заполнения, показанный на рис. 3. При этом сумма всех чисел в пирамиде равна 20+9+10+11=50.

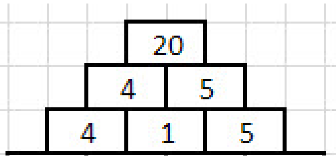

Рис. 3

Ответ. 50.

3. (8 баллов) 29-угольный торт разрезали по некоторым непересекающимся диагоналям так, что все куски оказались пятиугольными. Сколько кусков могло получиться (перечислите все возможности)?

Решение. Так как все стороны кусков являются сторонами или диагоналями исходного 29-угольника, то все углы этих кусков – части углов исходного торта или углы целиком. Поэтому сумма углов во всех кусках равна сумме углов 29-угольника, то есть 27×180 градусов. А так как в каждом куске торта сумма углов равна 3×180, то количество кусков не зависит от способа дележа и всегда равно $(27\times180)/(3\times180)=27/3=9$.

Ответ. 9.

4. (10 баллов) На каждой грани куба написали натуральное число. После этого в каждой вершине куба написали число, равное произведению чисел на трех гранях, которым принадлежит эта вершина. Сумма произведений чисел в вершинах куба оказалась равной 1001. Чему равна сумма чисел, написанных на гранях?

Решение. Пусть числа на верхней и нижней гранях были равны a_1 и a_2, на левой и правой b_1 и b_2, а на передней и задней – c_1 и c_2. Вычислим числа в вершинах и их сумму: $a_1b_1c_1+a_1b_1c_2+a_1b_2c_1+a_1b_2c_2+a_2b_1c_1+a_2b_1c_2+a_2b_2c_1+a_2b_2c_2=(a_1+a_2)(b_1+b_2)(c_1+c_2)$. Так как это произведение равно 1001, а каждый из множителей не меньше 2, то мы можем точно узнать все эти множители, они равны простым делителям числа 1001, то есть 7, 11 и 13. Поэтому сумма всех чисел на гранях тоже однозначно определена и равна 7+11+13=31.

Ответ. 31.

5. (10 баллов) Найдите хотя бы один многочлен P(x), удовлетворяющий условию (x-2016) *P(x+63) =x*P(x).

   Решение. Как нетрудно увидеть в результате подстановки x=0, число 63 должно быть корнем такого многочлена: (63-2016)P(63)=0*P(0)=0. Подставляя x=63, найдём еще один корень – число 63+63=126: (126-2016)P(126)=63*P(63)=0. Продолжая подставлять кратные 63 числа, мы последовательно получим, что корнями должны быть все числа, кратные 63 и меньшие 2016. Само число 2016 тоже корень, так как 0*P(2016+63)=2016*P(2016), откуда P(2016)=0.

   Но тогда по теореме Безу любой такой многочлен P(x) делится на Q(x)= (x-63)(x-126)...(x-1953)(x-2016). Однако если взять P=Q, то он подходит: Q(x+63)=x(x-63)...(x-1953), = xQ(x)/(x-2016).

   Ответ. P(x)=(x-63)(x-126)...(x-2016).

6. (10 баллов) Для двух натуральных чисел x и y выполняется равенство $5x+7y=92$. Перечислите через запятую буквы, соответствующие верным утверждениям:
   (А) $2x+y > 25$ (Б) $x+2y > 20$ (В) $3x \neq 5y$ (Г) $3x+4y < 56$

   Решение. Решим уравнение 5x+7y=92 в натуральных числах. Очевидно, что 7y должно заканчиваться на 2 или 7, откуда сразу получаем три возможных значения y: y=1, y=6, y=11. (Следующее значение y=16 уже не подходит, так как 7*16>92). Для каждого из этих значений отыскиваем x: если y=1, то x=(92-7)/5=17, для y=6 получаем x=(92-42)/5=10, а для y=11 получаем x=(92-77)/5 = 3. Для пары (17,1) неверно утверждение (Б), для пары (10,6) нарушается (В), а для пары (3,11) не выполнено (А). И только утверждение (Г) оказывается верным для всех трёх найденных решений.

   Ответ. Г.

7. (10 баллов) Из пункта А в пункт Б выехали одновременно велосипедист и мотоциклист (каждый со своей скоростью). Когда велосипедист проехал 25 км, мотоциклист был уже на полпути от велосипедиста до Б. А когда велосипедист проехал 40 км, мотоциклист как раз прибыл в Б. Найдите расстояние между пунктами А и Б.

   Решение 1 (арифметическое). Вторую половину пути от отметки "25 км" до Б мотоциклист проехал за то время, пока велосипедист проезжал 15 км (между "25 км" и "40 км"). Значит, и первую половину пути мотоциклист проехал за такое же время. Это значит, что в тот момент, когда мотоциклист был на отметке 25 км, велосипедист проехал 25-15=10 км. Теперь мы знаем, что скорость мотоциклиста в 2.5 раза выше скорости велосипедиста. Раз мы знаем, что в момент достижения им пункта Б велосипедист проехал 40 км, то мотоциклист проехал в 2.5 раза больше, то есть 2.5*40=100 км.

Решение 2 (алгебраическое). Пройденные расстояния всегда пропорциональны скоростям движения. Пусть расстояние от А до Б равно x км. По условию, когда велосипедист проехал 25 км, мотоциклист проехал 25 + (x-25)/2 км, а когда велосипедист проехал 40 км, мотоциклист проехал x. Таким образом, x/40 = (25 + (x-25)/2)/25 = (x+25)/50. Решая это уравнение, получим 50x=40x+1000; 10x=1000; x=100.

Ответ. 100 км.

8. (12 баллов) Дана доска 9×9 клеток. Вася хочет отметить на ней несколько клеток, вместе образующих квадрат, причём сделать это так, чтобы центральная клетка была среди отмеченных. Сколькими способами он может это сделать?

Решение. Рассмотрим возможные размеры отмеченных квадратов. Если сторона отмеченного квадрата не больше 5, то центральная клетка большого квадрата может оказаться любой из клеток отмеченного – это даёт нам столько вариантов, сколько всего клеток в отмеченном квадрате. То есть для квадрата со стороной 1 – 1 вариант, со стороной 2 – 4 варианта, со стороной 3 – 9 вариантов, со стороной 4 – 16 вариантов, со стороной 5 – 25 вариантов. Для квадратов с большей стороной центральная клетка попадёт в квадрат всегда, но общее число вариантов отметить квадрат внутри исходного будет равно 16 для квадратов со стороной 6, 9 для квадратов со стороной 7, 4 для квадрата со стороной 8 и 1 для квадрата со стороной 9 (для доказательства достаточно посмотреть на возможные положения левого нижнего угла отмеченного квадрата). Итого число вариантов равно 1+4+9+16+25+16+9+4+1=85.

Ответ. 85.

9. (15 баллов) В треугольнике ABC, где угол B вдвое больше угла C, проведена биссектриса AD. Оказалось, что CD = AB. Найдите величину угла A в градусах с точностью до 1/10 градуса.

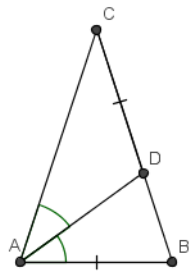

Рис. 4

Решение. Условия задачи (кроме соотношения ∠B=2∠C) показаны на рис. 4. Отразим треугольник ABC вместе с биссектрисой AD относительно стороны AC. На рис. 5 показан результат. В отраженном треугольнике AEC отрезок AF – биссектриса угла A, а CF=AE=AB. При этом угол ECB равен удвоенному углу ACB, то есть равен углу B. Посмотрим на четырёхугольник ABCF. В нем от основания BC под равными углами (B и 2C) отложены равные боковые стороны CF=BA.

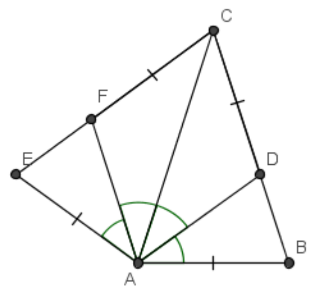

Рис. 5

Значит, этот четырёхугольник является равнобедренной трапецией, то есть его четвёртая сторона AF параллельна BC. Это значит, что сумма углов B и BAF равна 180°. Отсюда ∠A=2(180°-∠B)/3, и для определения углов треугольника имеется уравнение B + B/2 + 2(180°-B)/3 = 180. Решив его, получим ∠B=72°. Следовательно, ∠C=∠B/2=36° и A=180°-36°-72°=72°.

Ответ. 72°.

10. (15 баллов) Одиннадцать многоножек хотят взобраться на вершину Стеклянной Горы. Количества их ног — все (различные) чётные натуральные числа от 20 до 40. Склоны Стеклянной Горы очень скользки, и чтобы подняться или спуститься с неё, многоножка должна обуть хотя бы половину своих ног в специальные ботинки. Какое наименьшее

количество таких ботинок необходимо заготовить, чтобы все многоножки смогли дойти до вершины?

Решение. Сначала убедимся, что меньше чем 21 ботинка не хватит. Действительно, в тот момент, когда на вершине впервые оказались две многоножки, они обе должны быть в ботинках хотя бы на половине своих ног, то есть не меньше чем на (20+22)/2 = 21 ноге.

Однако 21 ботинка достаточно. Опишем один из возможных алгоритмов достижения цели. Пусть вначале на вершину заберутся две многоножки с наименьшим числом ног, потом первая из них спустится с 20 ботинками, что даст возможность подняться на вершину самой крупной многоножке (с 40 ногами). После этого другая многоножка спустится с полным комплектом ботинок и, таким образом, задача окажется сведена к предыдущей, но самая крупная многоножка уже находится на вершине. Продолжая подъем таким же образом, на вершину поднимутся последовательно все многоножки с 38, 36, ..., 24 ногами, и, наконец, туда в последний раз взойдут две самых маленьких. Такая незавидная судьба у них в этой задаче – постоянно носить обувь для более крупных соплеменниц.

Ответ. 21.