

Ответы и решения задач «жёлтого» уровня сложности MathCat



1. (5 баллов) Вася задумал двузначное число и сказал про него: «Если первая цифра моего числа чётна, то вторая — нечётна». И, как обычно, при этом соврал. Сколько есть вариантов чисел, которые он мог загадать?

Ответ: 20

Решение: Вася соврал только если обе цифры четные. Такое число можно составить, выбрав первую цифру 4 способами (2, 4, 6, 8), а вторую - 5 способами (0, 2, 4, 6, 8). Итого $4 \cdot 5 = 20$ вариантов.

2. (5 баллов) Сумма положительных чисел a , b и c равна 2020. Для них выполнено равенство $a^2 + 2bc = b^2 + c^2$. Чему равно большее из чисел a , b , c ?

Ответ: 1010

Решение: Данное соотношение эквивалентно соотношению $a^2 = (b - c)^2$ или $(a + b - c)(a - b + c) = 0$, откуда $c = a + b$ или $b = a + c$. Значит, большее число составляет половину суммы всех трёх чисел, оно равно $2020 : 2 = 1010$.

Указание: Если сумме двух других равно только b или только c , то рассуждения не верны.

3. (7 баллов) Сколькими способами можно вписать цифры вместо звёздочек в записи 2^{**2} , чтобы получилось число, кратное 24?

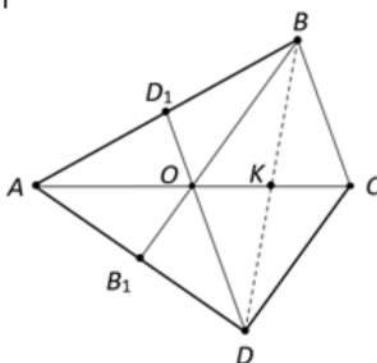
Ответ: 8

Решение 1 (без признака делимости): Разность между соседними такими числами должна делиться на 24 и на 10 (так как последняя цифра та же), поэтому она равна НОК $(24, 10) = 120$. Меньшее подходящее число 2112, поэтому остальные 2232, 2352, 2472, 2592, 2712, 2832, 2952. Всего 8 штук.

Указание к решению 2 (с признаком делимости): Можно сделать перебор: для делимости на 4, поэтому предпоследняя цифра должна быть нечетна, в каждом из этих 5 вариантов 3 или 4 варианта второй цифры, чтобы выполнялась делимость на 3. Останется проверить эти числа на кратность 8.

4. (7 баллов) Луч с началом в вершине B четырехугольника $ABCD$ делит отрезки AC и AD пополам. Луч с началом в вершине D делит отрезки AC и AB пополам. В каком отношении диагонали четырехугольника делят друг друга?

Ответ: BD — пополам, AC — 3 : 1



Решение: Обозначим точки, как показано на рисунке. Прямая BB_1 параллельна прямой CD (из условия OB_1 — средняя линия в треугольнике ACD). Аналогично из треугольника ABC следует параллельность DD_1 и BC . Значит, $BCDO$ — параллелограмм. Отсюда следует, что точка K — середина OC и ответ задачи.

5. (7 баллов) Взяли некоторое натуральное число A , прибавили к нему сумму его цифр, получив число B . Затем к числу B прибавили его сумму цифр, получилось число C . Потом из числа C вычли его сумму цифр. В результате таких операций снова получилось первоначальное число A . Найдите наименьшее A , для которого это возможно.

Ответ: 81

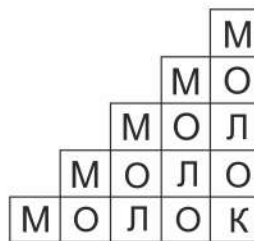
Решение: Если из числа вычесть сумму его цифр, то результат будет кратным 9. Поэтому число A должно делиться на 9. Суммы цифр первых десяти таких чисел равны 9, и только для 99 сумма цифр больше 9. Поэтому наименьшее число, для которого три указанных действия дают исходное - 81.

6. (10 баллов) Можно ли в ячейки таблицы 4×4 вписать числа $1, 2, \dots, 16$ так, чтобы любые два числа, стоящие в соседних по стороне ячейках, отличались на 2 или 3? Да - поставьте 1, Нет - поставьте 0.

Ответ: нельзя

Решение: Число 1 стоит в углу, так как его соседи только 3 и 4. Число 2 также стоит в углу, его соседи только 4 и 5. Эти углы должны иметь общую соседнюю клетку с числом 4, что невозможно.

7. (12 баллов) Сколькими способами можно «прочитать» слово **МОЛОКО**, начиная с некоторой клетки и переходя от буквы к следующей, расположенной в соседней (по стороне) клетке? Буква может быть прочитана несколько раз.



Ответ: 32

Решение: От **К** к **М** слово **МОЛОК** можно прочитать $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ способами, от **К** к **О** можно пройти 2 способами. Итого $16 \cdot 2 = 32$ способа.

8. (12 баллов) Найти обыкновенную дробь, которая расположена на координатной прямой между $15/17$ и $17/19$, знаменатель которой меньше 17.

Ответ: $8/9$

Решение: Можно показать, что такая дробь единственна.

9. (15 баллов) В треугольнике ABC угол A равен 46° , угол C равен 78° . Внутри треугольника на биссектрисе угла B взята такая точка O , для которой угол AOC равен 118° . Найти углы треугольника AOC .

Ответ: $A=23$, $C=39$, $O=118$

Решение: Если O - центр вписанной окружности, то ситуация удовлетворяет условию. Если точка O ближе к вершине B , нежели центр вписанной, то угол AOC меньше, если дальше - то больше. Если O - центр вписанной окружности, то AO и CO - биссектрисы углов треугольника. Значит, искомые углы равны $46:2=23$ градуса и $78:2=39$ градусов.

10. (20 баллов) Прямоугольник $n \times m$ разрезали на уголки из трёх клеток. Общая длина разрезов равна 2011. Найдите длины сторон прямоугольника.

Ответ: 4 и 465

Решение: Длина разрезов $2mn - m - n - 2mn/3 = 2011$, что после преобразования $4mn - 3m - 3n = 6033$ дает уравнение $(4n-3)(4m-3) = 24141 = 13 \cdot 1857$. Получаем $4n-3=13$, $4m-3=1857$, откуда находим ответ.